maths

Un bac de maths en première ?
Ce qui change !

POURQUOI ?

- Une nouvelle épreuve de maths est mise en place pour les élèves de Première générale et technologique.
L'objectif est de s'assurer que tu maîtrises les compétences de base en maths (calcul, probabilités, statistiques) pour la suite de tes études.

QUAND ET COMMENT ?

- L'épreuve est prévue en juin 2026
- C'est une épreuve écrite d'une durée de 2 heures
- Son coefficient est de 2

LE CONTENU DE L'ÉPREUVE

- Partie 1 (6 points) : Questions courtes (calculs, QCM) pour évaluer tes réflexes et tes automatismes

- Partie 2 (14 points) : Problèmes de raisonnement pour vérifier ta capacité à résoudre des exercices plus complexes

LES PROGRAMMES CONCERNÉS

- Voie générale (spécialité maths) : L'épreuve porte sur le programme de spécialité de Première

- Voie générale (sans spécialité maths) : L'épreuve porte sur le programme de maths de l'enseignement scientifique

- Voie technologique : L'épreuve porte sur le programme commun de maths

ET LES RÉSULTATS ?

- Les notes seront disponible en juillet 2026

- Elles seront ajoutées à ton dossier Parcoursup

LE PROGRAMME DE MATHS EN PREMIÈRE

- En Première, tu vas aborder des notions impotantes qui vont te servir de base pour la suite.

Voici un aperçu de ce qui t'attend, présenté de manière plus lisible qu'un simple sommaire.

1. Algèbre et analyse

- **Second degré** : Tu vas apprendre à manipuler les polynômes du second degré, à résoudre des équations, à factoriser et à étudier leur variations

- **Dérivation** : Cet outil puissant te permettra de déterminer les variations d'une fonction et de trouver ses maximums ou ses minimums.

- **Fonction exponentielle** : Tu vas découvrir une fonction très importante en sciences, qui est égale à sa propre dérivée

- **Variations et suites** : Tu vas étudier comment les fonctions et les suites évoluent, et découvrir les suites aritemétiques et géométriques

2. Géométrie

- **Calcul vectoriel et produits scalaires** : Tu apprendra à travailler avec les vecteurs dans l'espace, à calculer des distances et des angles

- Géométrie repérée : Tu utiliseras des repères pour décrire des figures et résoudre des problèmes de géométrie

- Trigonométrie : Tu réviseras les bases de la trigonométrie et tu l'utiliseras pour résoudre des problèmes de géométrie

3. Statistiques et probabilités

- Probabilités conditionnelles : Tu vas apprendre à calculer la probabilité d'un événement sachant qu'un autre événement s'est déjà produit.

- Variables aléatoires et statistiques : Tu vas découvrir les variables aléatoires et leur loi de probabilité pour analyser des données.

maths

Le second degré

1 FORME CANONIQUE ET VARIATIONS

a) Fonction polynôme du second degré

- On appelle une fonction polynôme du second degré toute fonction qui peut s'écrire

$$\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$$

↳ Dans cette formule, a, b et c sont des nombres réels, et surtout, a doit être différent de 0. C'est le x^2 qui fait qu'on est au second degré.

Par exemple :

✓ • $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ est une fonction du second degré ($a = 3$, $b = -7$, $c = 3$).

✓ • $h(x) = 4 - 2x^2$ en est une aussi, car tu peux la réécrire $h(x) = -2x^2 + 0x + 4$

✗ • Par contre, $m(x) = 5x - 3$ n'est pas du second degré : c'est une fonction affine, c'est-à-dire du premier degré.

b) Forme canonique

- La forme canonique est une autre manière d'écrire une fonction du second degré. Elle s'écrit sous la forme

$$\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$$

↳ Où α et β sont des nombres réels. Cette forme est très utile pour étudier les variations de la fonction.

Exercice - type :

- On veut trouver la forme canonique de $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

⇒ Pour ça, on va d'abord mettre en facteur le nombre qui est devant le x^2 (ici c'est 2) :

$$f(x) = 2(x^2 - 10x) + 10$$

⇒ Ensuite, on cherche à faire apparaître le début d'une identité remarquable. On sait que $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Notre expression $x^2 - 10x$ c'est le début de cette identité, il nous manque juste le $+25$.

=> Donc on va ajouter 25... et le soustraire juste après pour que l'expression ne change pas :

$f(x) = 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 10$

=> Maintenant, on peut remplacer la partie qui nous intéresse par l'identité remarquable :

$f(x) = 2((x-5)^2 - 25) + 10$

=> On distribue le 2 :

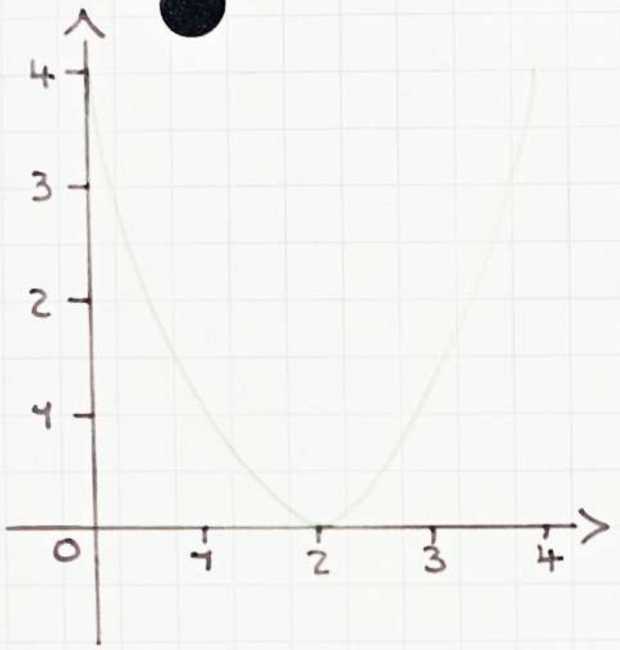
$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-5)^2 - 2(25) + 10 \\ &= 2(x-5)^2 - 50 + 10 \\ &= 2(x-5)^2 - 40 \end{aligned}$$

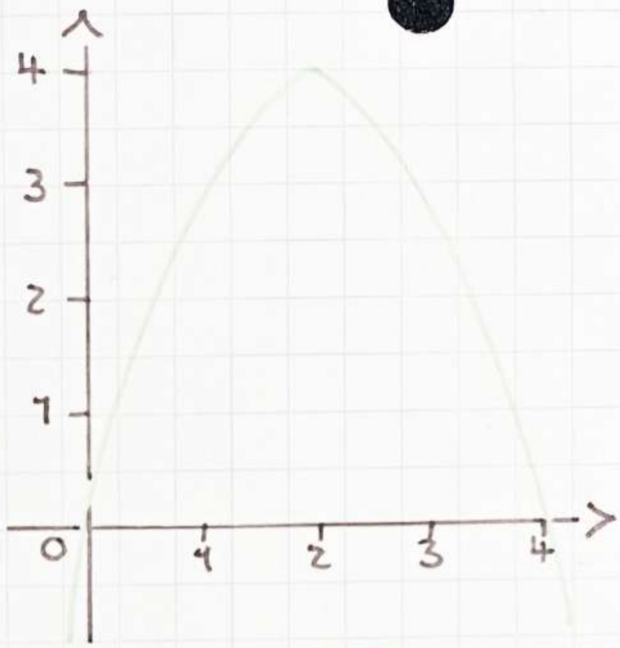
Et voilà, la forme canonique est : $f(x) = 2(x-5)^2 - 40$.

c) Variations et représentation graphique

- La représentation graphique d'une fonction du second degré est toujours une parabole.

- Si a est positif -> f est d'abord décroissante, puis croissante.
- Si a est négatif -> f est d'abord croissante, puis décroissante.



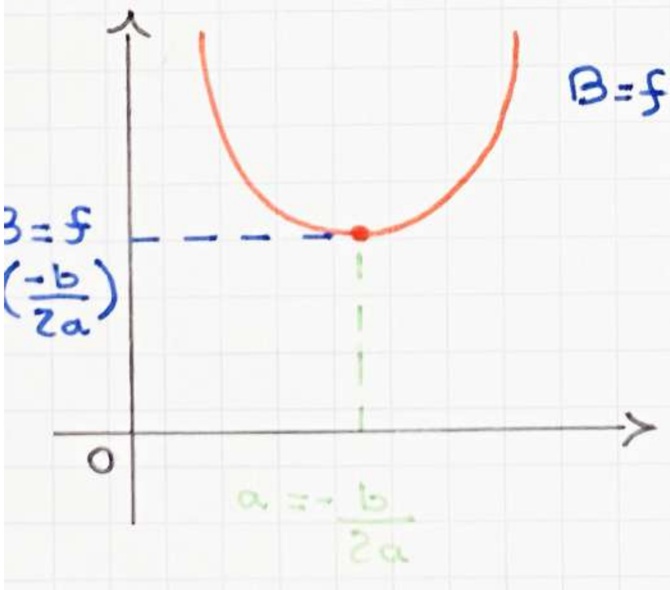


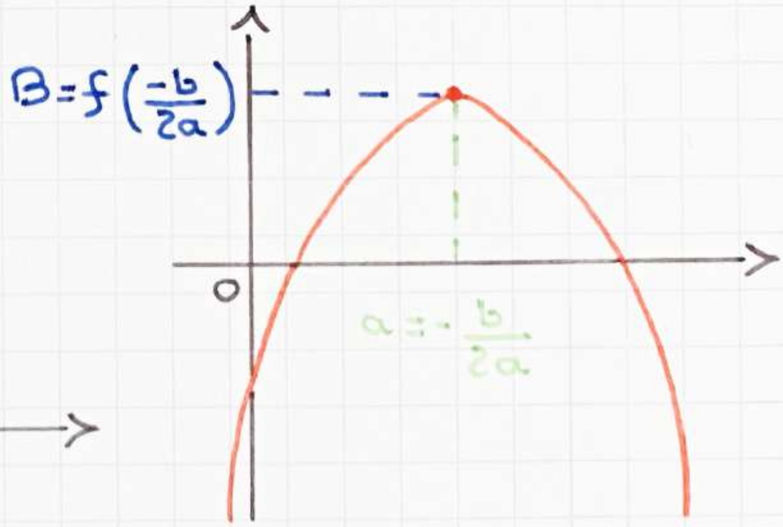
$a > 0$ $a < 0$

- Le sommet de la parabole est le point où la fonction atteint son <u>extremum</u> (maximum ou minimum). Ses coordonnées sont $(\alpha ; \beta)$, les mêmes α et β que dans la forme canonique.

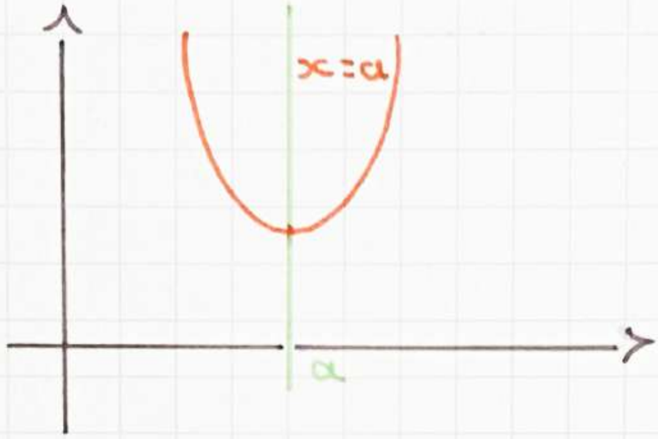
  ↳ Pour trouver α et β sans passer par la forme canonique, il existe des formules : $\boxed{\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)}$.

- La parabole a également <u>un axe de symétrie</u>, qui est la droite verticale d'équation $x = \alpha$.





- La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = a$



2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

- Une équation du second degré est de la forme : $\boxed{ax^2 + bx + c = 0.}$
  Les solutions de cette équation sont appelées <u>les racines de la fonction</u> $f(x) = ax^2 + bx + c$.

  Pour trouver ces solutions, on utilise <u>le discriminant</u>, noté Δ.
  La formule est $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$

  ↳ Le signe de Δ nous donne le nombre de solutions :

  ✗ - Si $\Delta < 0$: il n'y a <u>aucune solution</u> réelle. La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

  ✓ - Si $\Delta = 0$: il y a <u>une seule solution</u> (racine double) : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

✓ Si $\Delta > 0$: il y a <u>deux solutions</u> distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

<u>Exercice - type</u> : Soit $f(x) = -2x^2 + x + 1$.
Montrer que $x_1 = 1$ est une racine, puis trouver la deuxième.

1) Pour montrer que 1 est une racine, il suffit de calculer $f(1)$.

→ $f(1) = -2(1)^2 + 1 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$.

Puisque $f(1) = 0$, on confirme que 1 est bien une racine.

2) Pour trouver la deuxième racine, on peut utiliser la relation entre le produit des racines et les coefficients de la fonction. Le produit des racines $x_1 \times x_2$ est égal à $\frac{c}{a}$.

Ici, $x_1 = 1$ et $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{-2}$.

Donc $1 \times x^2 = \frac{-1}{2}$, ce qui nous donne

$$x_2 = \frac{-1}{2}.$$

La deuxième racine est donc $\frac{-1}{2}$.

=> On remplace x par 3 dans notre forme factorisée : $f(3) = a(3+1)(3-2) = a(4)(1) = 4a$.

=> On sait que $f(3) = -2$, donc $4a = -2$.

=> En résolvant, on trouve $a = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$. La forme factorisée de la fonction est donc $f(x) = \frac{-1}{2}(x+1)(x-2)$.

b) Signe d'un trinôme

- Le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et des racines.

✗ - Si $\Delta < 0$: il n'y a pas de racine. Le signe de $f(x)$ est toujours le même que celui de a sur tout $\mathbb{R}$.

✓ - Si $\Delta = 0$: une seule racine x_0. Le signe de $f(x)$ est le même que celui de a sur tout $\mathbb{R}$, sauf en x_0 où la fonction s'annule.

✓ - Si $\Delta > 0$: deux racines x_1 et x_2. Le signe de $f(x)$ est le signe de a à l'extérieur des racines ($x < x_1$ et $x > x_2$) et le signe opposé à celui de a entre les racines ($x_1 < x < x_2$)

Exercice - type : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n$.

↳ Calcule les quatres premiers termes :

· Le premier terme est déjà donné : $u_0 = 5$.

· Pour trouver u_1, tu utilises la formule avec :
$n = 0 : u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$

· Pour trouver u_2, tu utilises la formule avec :
$n = 1 : u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45$

· Pour trouver u_3, tu utilises la formule avec :
$n = 2 : u_3 = 3 \times u_2 = 3 \times 45 = 135$

d) Représentation graphique d'une suite

⊙ Pour représenter une suite, tu peux placer les points de coordonnées $(n ; u_n)$ dans un repère.

⚠ Ce ne sont pas des fonctions continues donc tu ne traces pas de lignes entre les points !

maths

Généralité sur les suites

1 DÉFINITION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

a) Définition d'une suite

- Une suite est une liste de nombre ordonnée. Chaque nombre de la suite est appelé un terme. Pour les identifier, on utilise un indice : u_n. Le nombre n est l'indice ou le rang du terme.

Par exemple : Si on prend la suite des nombres impairs

- On peut la noter (u_n).

$u_0 = 1$ (le 1er terme, d'indice 0)

$u_1 = 3$ (le 2e terme, d'indice)

$u_2 = 5$ (le 3e terme, d'indice)

b) Suite définies en fonction de n (forme explicite)

- C'est la manière la plus simple de définir une suite. On te donne une formule qui dépend de n.
Pour trouver n'importe quel terme, il suffit de remplacer n par la valeur de l'indice que tu veux calculer.

Exercice-type : Calcule les quatres premiers termes de la suite
$v_n = 3n^2 - 1$.

=> Les premiers termes correspondent aux indices $n = 0, 1, 2, 3$.

- Pour $n = 0$: $v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$
- Pour $n = 1$: $v_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$
- Pour $n = 2$: $v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$
- Pour $n = 3$: $v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$

c) Suites définies par récurrence

- Dans ce cas, pour calculer un terme, tu as besoin du terme précédent.
On te donne le premier terme, et une formule qui te permet de passer d'un terme au suivant.

Exercice - type : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n$.

↳ Calcule les quatres premiers termes :

- Le premier terme est déjà donné : $u_0 = 5$.

- Pour trouver u_1, tu utilises la formule avec :
$n = 0 : u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$

- Pour trouver u_2, tu utilises la formule avec :
$n = 1 : u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45$

- Pour trouver u_3, tu utilises la formule avec :
$n = 2 : u_3 = 3 \times u_2 = 3 \times 45 = 135$

d) Représentation graphique d'une suite

⊙ Pour représenter une suite, tu peux placer les points de coordonnées $(n ; u_n)$ dans un repère.

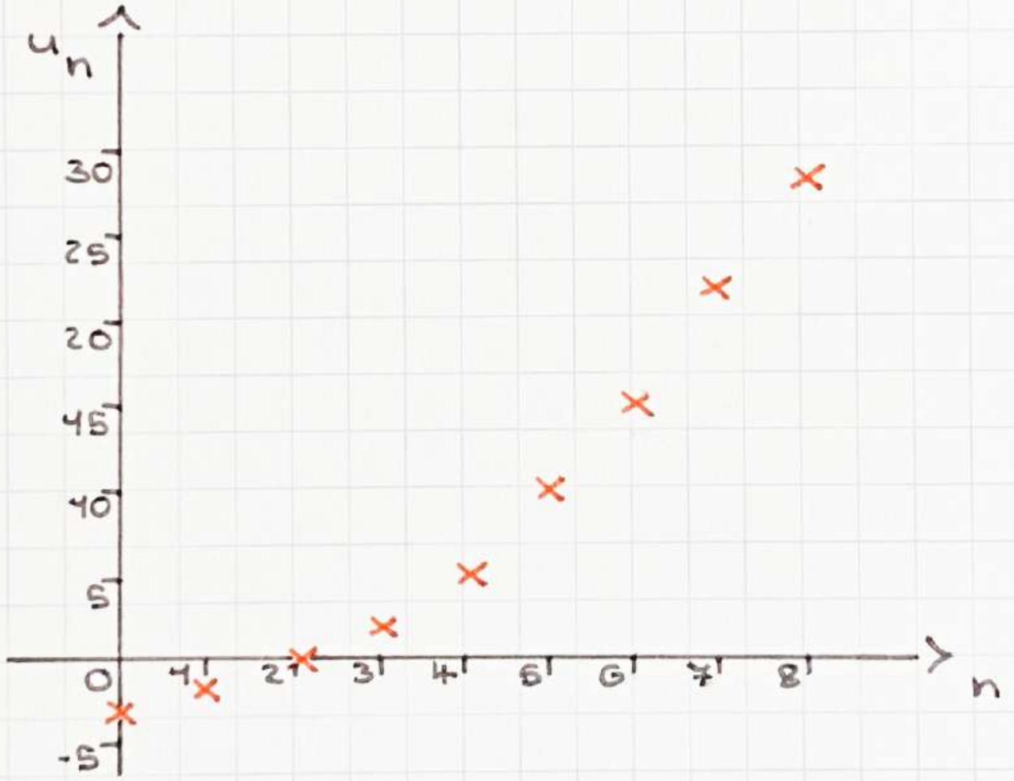
⚠ Ce ne sont pas des fonctions continues donc tu ne traces pas de lignes entre les points !

Exercice type : Pour tout entier naturel n, on donne : $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$

↳ Représenter dans un repère les premiers termes de la suite (u_n).

· On construit un tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-2,5	-1	-1,5	-5	-9,5	15	21,5	29



2 SENS DE VARIATION D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

⊙ Pour savoir si une suite est croissante ou décroissante, il faut comparer un terme avec le suivant.

On regarde la différence $u_{n+1} - u_n$ ou le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

✓ → Si $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$) : la suite est croissante

✗ → Si $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$) : la suite est décroissante

-> Si les inégalités sont strictes (> ou <), on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.

3 NOTION DE LIMITE D'UNE SUITE

- La limite d'une suite, c'est la valeur vers laquelle les termes de la suite se rapprochent quand n devient très, très grand.

-> Si la suite s'approche d'une valeur réelle L, on dit qu'elle converge vers L. On écrit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = L}$$

-> Si la suite ne converge pas vers une valeur finie (par exemple, si les termes deviennent de plus en plus grands sans limite), on dit qu'elle diverge.

Exemple pour comprendre :

- Pour tout entier naturel non nul n, on donne : $\boxed{u_n = \frac{2n+1}{n}}$

On construit le tableau de valeurs de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	100
u_n	3	2,5	2,33	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.

↳

- On dit que la suite (u_n) converge vers 2.
- On note : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$.
- On lit : la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 2.

maths

Suite aritlemétiques et géométriques

1 SUITES ARITHMÉTIQUES

a) Définition

- Une suite aritlemétique est une suite où tu passes d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre. Ce nombre est appelé <u>la raison et on le note r</u>.

↳ La formule de récurrence est $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

⚠ Si tu veux calculer un terme u_n <u>sans avoir à calculer tous les précédents</u>, tu utilises la formule explicite :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

<u>Exercice-type</u> : Trouve l'expression en fonction de n pour la suite aritlemétique définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.

· On voit que la raison r est -4 car on ajoute -4 à chaque terme pour trouver le suivants.

· Le premier terme u_0 est 7.
-> En utilisant la formule
$$u_n = u_0 + nr$$
· On remplace par les valeurs :
$u_n = 7 + n(-4)$
$u_n = 7 - 4n$

b) Variations

⊙ Les variations d'une suite arithmétique sont très simples à déterminer, elles dépendent du signe de la raison r.

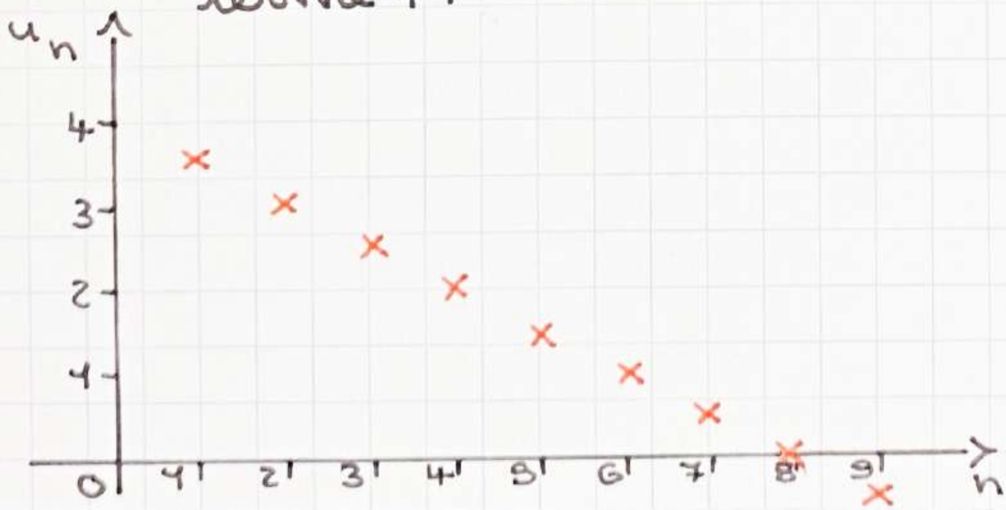
✓ ⊙ Si $r > 0$, la suite est croissante
✗ ⊙ Si $r < 0$, la suite est décroissante
— ⊙ Si $r = 0$, la suite est constante

c) Représentation graphique

⊙ Les points qui représentent une suite arithmétique seront toujours alignés.

Exemple pour comprendre :

-> On a représenté ci-dessous la suite de raison $-0{,}5$ et de premier terme 4.



2 SUITES GÉOMÉTRIQUES

a) Définition

- Une suite géométrique est une suite où tu passes d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. Ce nombre est la raison et on la note q. La raison q doit être différente de 0.

↳ La formule de récurrence est $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$

La formule explicite pour calculer directement un terme est :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple pour comprendre :

→ Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.
Si le premier terme est égal à 5, les termes successif sont :

- $u_0 = 5$
- $u_1 = 10$
- $u_2 = 20$
- $u_3 = 40$

Exercice-type : La suite $u_3 = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

· Pour le savoir, il faut calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(S'il est constant, c'est une suite géométrique.)

· $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1}$

· $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5} = 5^{n+1-n} = 5$

↳ Le rapport est constant et égal à 5. C'est bien une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$

b) Variations

⊙ Les variations dépendent du premier terme u_0 et de la raison q.

Si $u_0 > 0$:

✓ → Si $q > 1$, la suite est croissante
✗ → Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante

Si $u_0 < 0$:

✗ → Si $q > 1$, la suite est décroissante
✓ → Si $0 < q < 1$, la suite est croissante

2 SUITES GÉOMÉTRIQUES

a) Définition

⊙ Une suite géométrique est une suite où tu passes d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. Ce nombre est la raison et on la note q. La raison q doit être différente de 0.

↳ La formule de récurrence est $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$

La formule explicite pour calculer directement un terme est :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple pour comprendre :

→ Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.
Si le premier terme est égal à 5, les termes successifs sont :

- $u_0 = 5$
- $u_1 = 10$
- $u_2 = 20$
- $u_3 = 40$

Exercice-type : La suite $u_3 = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

$= \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right) : \frac{1}{2}$ $= \frac{255}{256} \times 2$

$= \left(1 - \frac{1}{256}\right) \times 2$ $= \frac{255}{128}$

$= \left(\frac{256}{256} - \frac{1}{256}\right) \times 2$

c) Algorithme de somme

- Si la suite n'est ni arithmétique, ni géométrique, tu ne peux pas utiliser les formules ci-dessus. Il faut alors calculer chaque terme un par un et les additionner. C'est là qu'un programme peut être utile.

Exercice-type : Pour tout entier naturel n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0{,}2u_n + 1 \end{cases}$

-> Calculer à l'aide d'un programme la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.

- La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique. Il n'est donc pas possible d'utiliser les formules vues plus haut pour calculer la somme des termes consécutifs. Pour cela, on va utiliser un programme Python.

3 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

a) Cas des suites arithmétiques

- Pour faire la somme des ^{n} premiers entiers naturels, on utilise la formule :

$$\boxed{1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice-type : Calcule $S_1 = 1+2+\ldots+348$.

· Ici $n = 348$. On applique la formule :

$$S_1 = \frac{348\times(348+1)}{2} = \frac{348\times 349}{2}$$

$$= 60726$$

b) Cas des suites géométriques

- Pour faire la somme des premiers termes d'une suite géométrique, la formule est :

$$\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Exercice-type : Calcule $S_1 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$$\cdot = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{7+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{8}}{\frac{1}{2}}$$

```
def somme(n):
    u=2
    s=0
    for i in range(0,n+1):
        s=s+u
        u=0.2*u+1
    return(s)
```

```
>>> somme(10)
14.687499808000
```

- On trouve : $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{10}$
  $\simeq 14{,}69$

maths

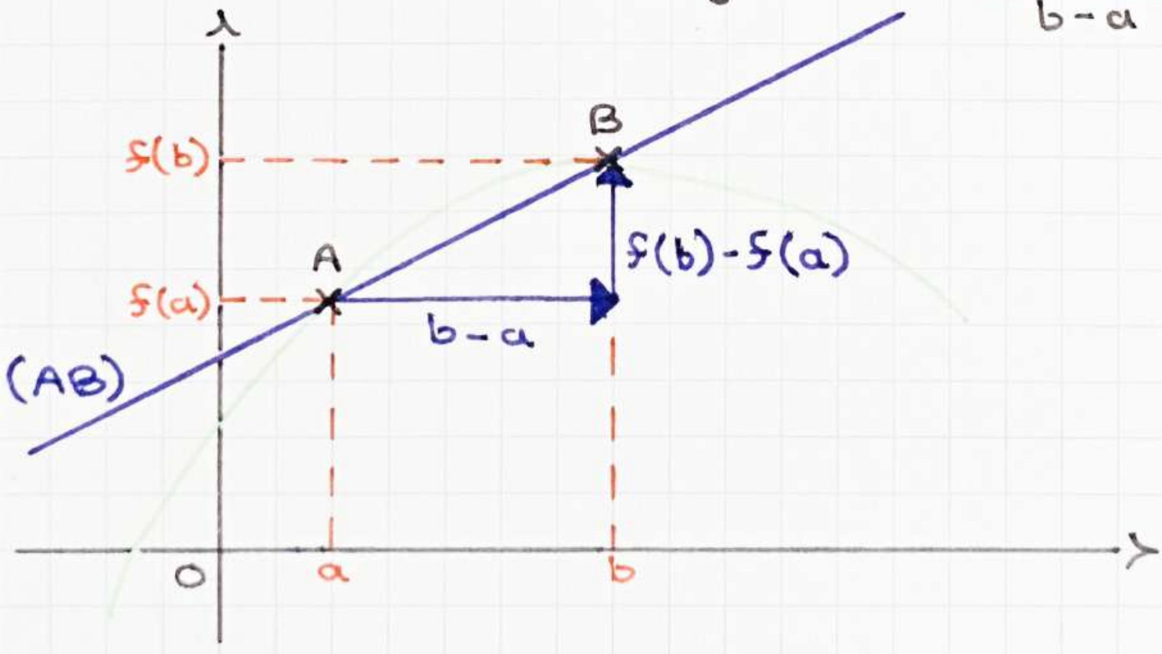
La dérivation

1 NOMBRE DÉRIVÉ

a) Pente d'une droite

- Pour comprendre la dérivation, il faut d'abord se souvenir de ce qu'est la pente d'une droite qui passe par deux points A et B est le "coefficient directeur".

↳ Sur le graphique suivant, la pente de la droite (AB) sécante à la courbe est égale à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ✱



✱ Cela correspond au taux d'accroissement.

- Pour le calculer, on utilise une version du taux d'accroissement, mais avec un second point M qui se rapproche de plus en plus de A.
Quand M est presque sur A, la pente de la droite (AM) devient le nombre dérivé

↳ On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, la formule pour le calculer est :

$$\boxed{f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L}$$

L est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Exemple : Calculer, par exemple, lim h+2 c'est calculer h+2 lorsque h tend vers 0.
Donc $\lim_{h \to 0} h+2 = 0+2 = 2$

[Le "$\lim_{h \to 0}$" signifie que l'on calcule la valeur de l'expression quand h se rapproche de 0.]

c) Cas de la fonction valeur absolue

- La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

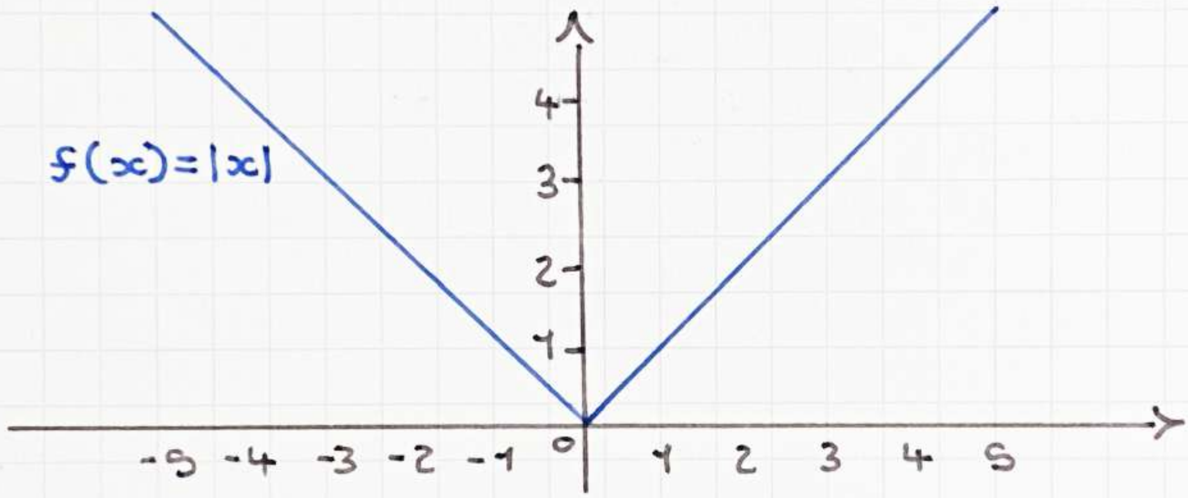
$$\boxed{f(x) = |x|}$$

Exemples

- $f(-5) = |-5| = 5$
- $f(4) = |4| = 4$

Représentatif graphique

- Si $x \leq 0$, alors $f(x) = |x| = -x$
- Si $x \geq 0$, alors $f(x) = |x| = x$



Exercice - type : Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas,

car dépend du signe de h.

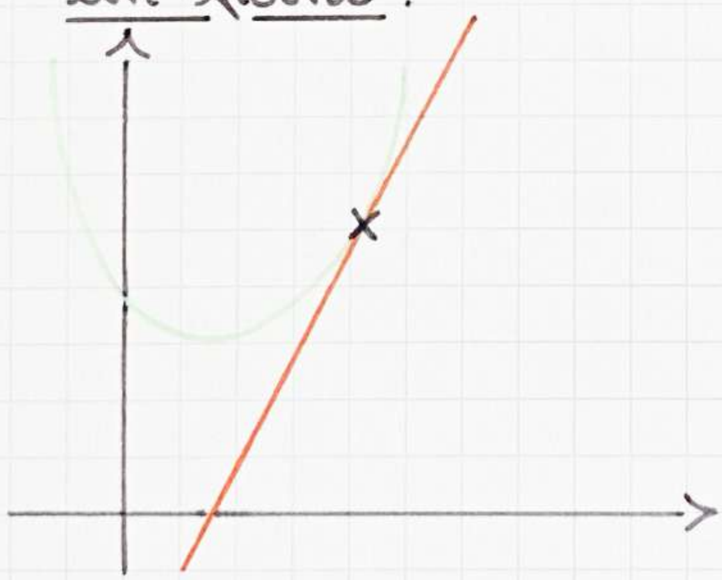
<u>Remarque</u> : Cependant, il est a noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre $\neq 0$.

De plus, la limite ne peut pas être égale à la fois à 1 et -1.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

2 TANGENTE À UNE COURBE

a) Définition de la tangente

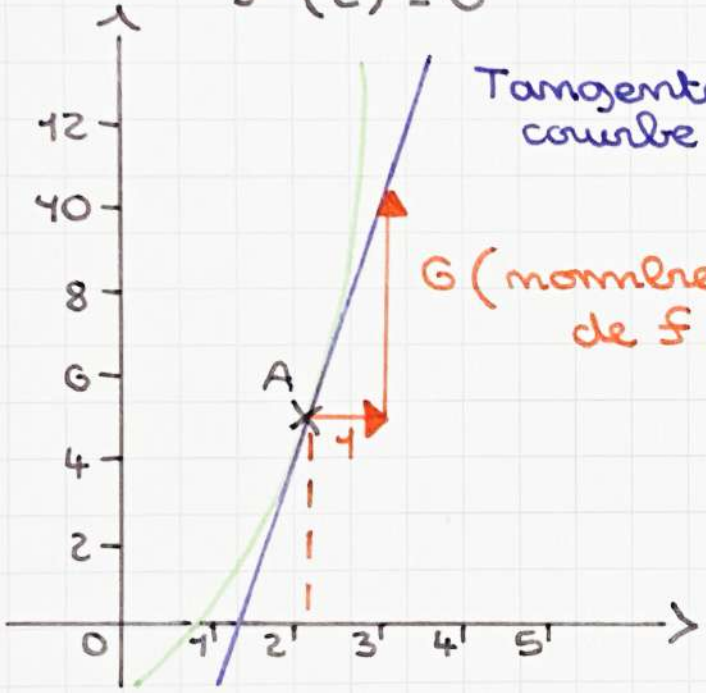
- La tangente à une courbe est une droite qui "<u>touche" la courbe en un point</u>.



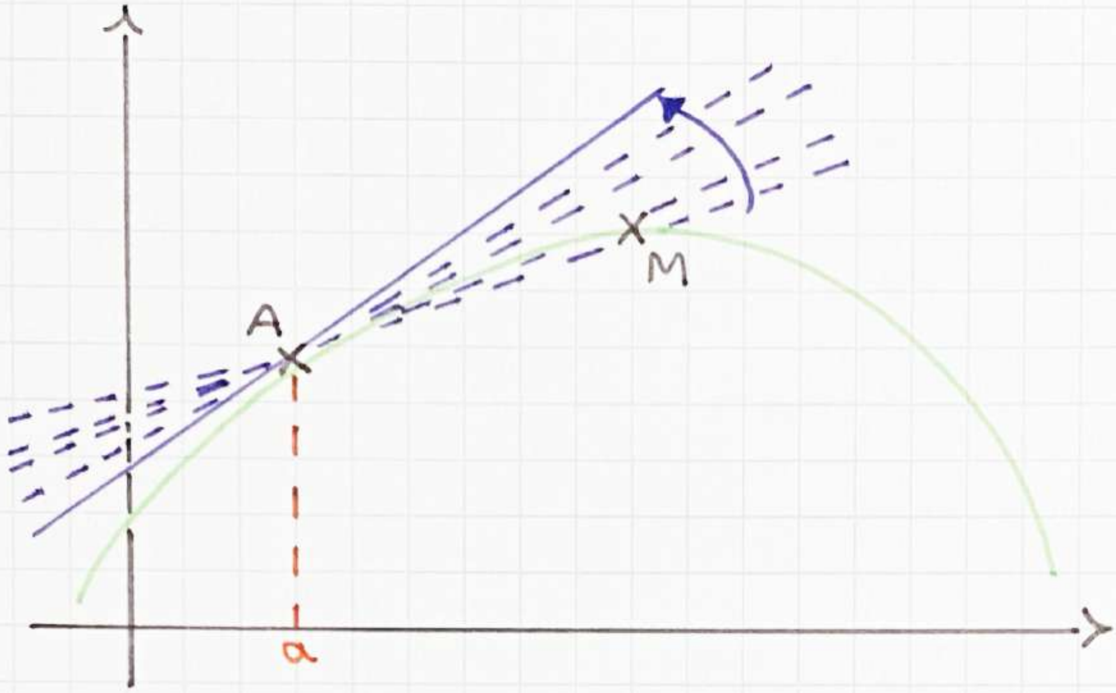
• La tangente à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de pente le nombre dérivé $f'(a)$.

Exemple pour comprendre :

-> Sur le graphique ci-dessous, on lit que la pente de la tangente en 2 est égale à 6 et donc : $f'(2) = 6$



Remarque : Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite sécante (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.
Donc la pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$ défini dans la partie 1.



b) Équation de la tangente

- La tangente étant une droite, tu peux trouver son équation.
Si tu as le nombre dérivé $f(a)$, l'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f(a)(x-a) + f(a)}$$

Exercice-type : On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 5x + 2$.

→ Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de forme :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

On commence par calculer le nombre dérivé en 1, $f'(1)$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-5(1+h)+2-(1^2-5\times1+2)}{h}$$

$$= \frac{1+2h+h^2-5-5h+4}{h}$$

$$= \frac{-3h+h^2}{h}$$

$$= \frac{h(-3+h)}{h}$$

$$= -3+h$$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -3+h$

$= -3+0 = -3$

Le nombre dérivé de f en 1 vaut -3 et on note : $f'(1) = -3$

- On calcule $f(1)$: $f(1) = 1^2 - 5\times1+2 = -2$

- Une équation de la tangente en 1 est donc de la forme :

$y = -3(x-1)+(-2)$, soit :

$y = -3x+3-2$

$y = -3x+1$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 1 est :

$y = -3x+1$.

3 DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

- On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle I, si elle est dérivable en tout réel x de I.
  Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonctions f	Dérivée f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice-type : Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 100$ 2. $g(x) = -5x$

↳

- $f(x) = 100$
  $\rightarrow f'(x) = 0$
- $g(x) = -5x$
  $\rightarrow g'(x) = -5$

4 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

a) Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Formules d'opérations : u et v sont deux fonctions dérivables

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = ku(x), k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ku'(x)$
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Exercice-type : Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :
$f(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

↳

• $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 3x^2$
$\rightarrow u'(x) = 3 \times 2x = 6x$

$v(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Donc :
$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

b) Dérivée d'une fonction composée $f(ax+b)$

Fonction f	Dérivée f'
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Exercice-type : Calculer les fonctions dérivées des fonctions g et h définies par :

1. $g(x) = (7x+1)^3$ 2. $h(x) = \sqrt{5x-4}$

↳

• $g(x) = (7x+1)^3$
$g'(x) = 7 \times 3(7x+1)^2 = 21(7x+1)^2$
En effet, la dérivée de la fonction cube est $(x^3)' = 3x^2$

- $h(x) = \sqrt{5x-4}$

$h'(x) = 5 \dfrac{1}{2\sqrt{5x-4}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-4}}$

En effet, la dérivée de la fonction racine carrée est $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

maths

Variations des fonctions

1 ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

a) Signe de la dérivée

- C'est la règle principale à retenir. Le signe de la dérivée $f(x)$ te donne les variations de la fonction $f(x)$.

✓ - Si $f(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante.

✗ - Si $f(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante.

- Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

✗ - Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

✓ - Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

<u>Remarque</u> : Si $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

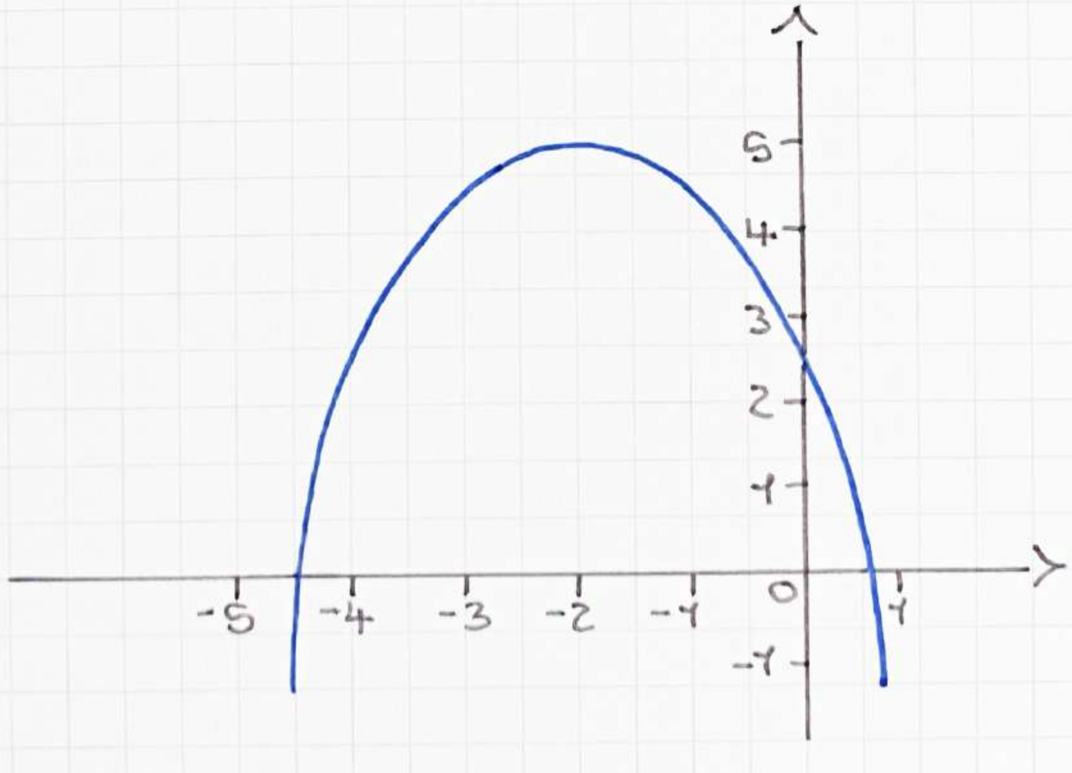
<u>Exercice-type</u> : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(2) = -1$:

On donne le signe de la dérivée dans le tableau de variations.

Compléter le tableau par les variations de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

<u>Voici le représentatif graphique de $f(x)$</u>



↳

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

b) Variations et une fonction

Exercice-type : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$.

1) Calculer la fonction dérivée f' de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

↳ 1) $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$

2) Pour étudier le signe de la dérivée on commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

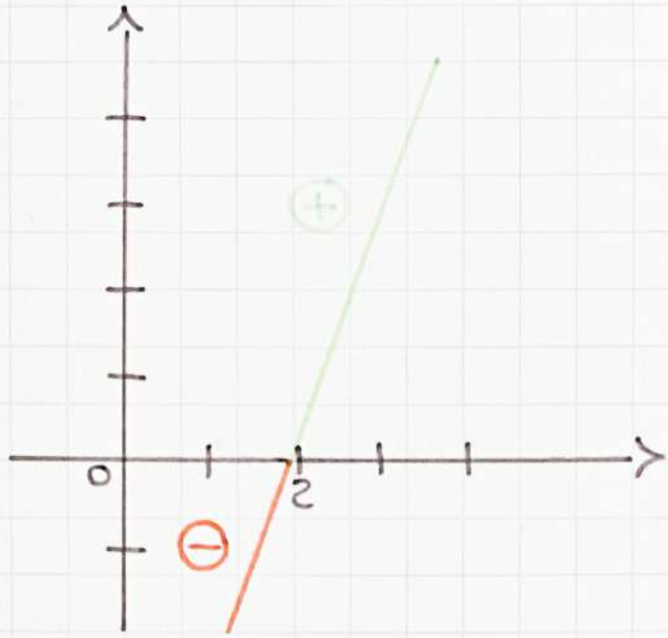
Soit : $4x - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = \frac{8}{4} = 2$

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Donc f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis positive (après $x = 2$).



3) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème vu au début de la partie

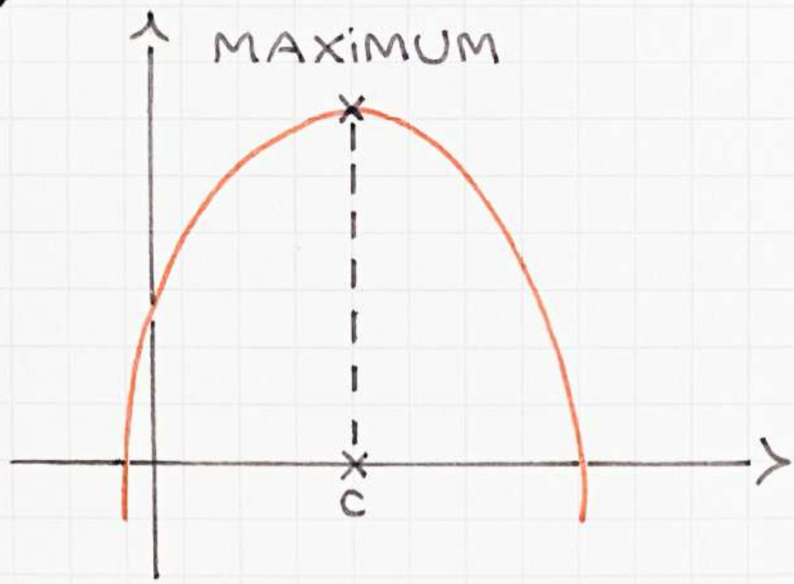
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		-7	↗	

$$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$$

2 EXTREMUM D'UNE FONCTION

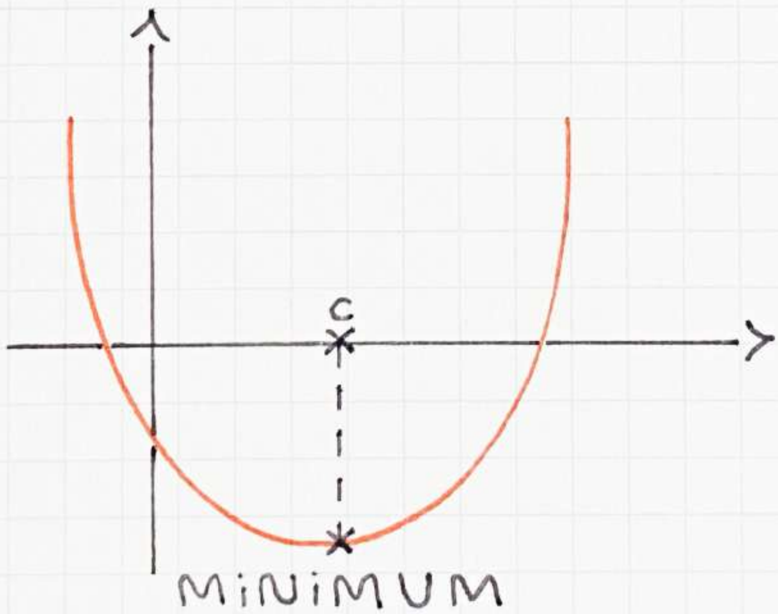
- La fonction admet un maximum au point où la dérivée s'annule et change de signe.

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		max	↘	



- La fonction admet un minimum au point où la dérivée s'annule et change de signe.

x	$-\infty$	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$



- Si la dérivée passe de négative à positive, la fonction a un minimum
- Si la dérivée passe de positive à négative, la fonction a un maximum

3 APPLICATIONS

a) Étudier le signe d'une fonction

- Grâce au tableau de variations, tu peux déduire le signe de la fonction.

Exemple : Si une fonction est strictement croissante et qu'elle s'annule en $x = 1$, tu peux en déduire qu'elle est négative avant 1 et positive après.

Exercice-type : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 4x - 5$.

a. Vérifier que 1 est une racine de f

b. Dresser le tableau de variations f et en déduire le signe de f en fonction de x.

a. $f(1) = 1^3 + 4 \times 1 - 5 = 0$

Donc 1 est une racine de f.

b.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	↗	0	↗

D'après le tableau de variations, f est positive sur $[1 ; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; 1]$

b) Position relative de deux courbes

- Pour savoir si une courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus ou en-dessous d'une autre courbe $\mathcal{C}_f$, tu étudies le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

> - Si $f(x) - g(x) \geq 0$, alors f est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
>
> - Si $f(x) - \mathcal{C}(x) \leq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Exercice-type : Soit f et g deux fonctions définies sur $[2 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$

1) Prouver que : $f(x) \geq g(x)$
2) En déduire la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

↳ 1) On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

On pose : $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (-5x + 18) = x^3 + 5x - 18$
On a : $h'(x) = 3x^2 + 5$
Donc $h'(x) > 0$
On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$

· On dresse le tableau de variations

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	0 $\nearrow$	

$h(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$
D'après le tableau de variations, on a : $h(x) \geq 0$
Soit : $f(x) - g(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq g(x)$

2) On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

c) Résoudre un problème d'optimisation

- Tu peux utiliser la dérivation pour trouver le maximum ou le minimum dans un problème concret (coût, bénéfice, volume...).

Exercice-type :

Une entreprise fabrique des composants pour ordinateur. Pour une quantité x, exprimée en milliers de composants, le coût total en milliers d'euros est :
$C(x) = 0{,}2x^2 + 24x + 20$ avec $x \in [0 ; 30]$

La recette est alors égale à : $R(x) = 30x$
Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût total.
Déterminer le bénéfice maximal et le nombre de composants correspondants à produire.

↳ On calcule l'expression de la fonction B donnant le bénéfice :

- $B(x) = R(x) - C(x)$
$= 30x - (0{,}2x^2 + 24x + 20)$
$= 30x - 0{,}2x^2 - 24x - 20$
$= -0{,}2x^2 + 6x - 20$

On calcule la fonction dérivée B' :
- $B'(x) = -0{,}2 \times 2x + 6$

On résout l'équation $B'(x) = 0$:
- $-0{,}4x + 6 = 0$
$x = \dfrac{-6}{-0{,}4} = 15$

La fonction B' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur $-0{,}4$ est négatif.
Donc B' est décroissante, elle est donc d'abord positive (avant $x = 15$) puis négative (après $x = 15$).

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		↗	25	↘	

• $B(15) = -0,2 \times 15^2 + 6 \times 15 - 20 = 25$

On lit dans le tableau que la fonction B atteint son maximum en 15 et que ce maximum est égal à 25.

Le bénéfice maximal est donc de 25 000 € pour 15 000 composants produits.

d) Étudier le sens de variation d'une suite

• Pour une suite (u_n) définie par une fonction $f(x)$, tu peux étudier les variations de la fonction f pour en déduire celles de la suite.

> • Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) sera aussi décroissante même si sa fonction associée ne l'est pas partout.

maths

La fonction exponentielle

1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

a) La fonction exponentielle

- Il existe une seule fonction qui est égale à sa propre dérivée ($f' = f$) et qui passe par le point $(0;1)$.

↳ On appelle cette fonction, la fonction exponentielle, notée e^x ou $\exp(x)$.
C'est une fonction qui est toujours positive ($e^x > 0$) et qui a une croissance extrêmement rapide,
par exemple, e^{21} dépasse le milliard

b) Le nombre e

- Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle, c'est-à-dire que $e^1 = e$. C'est un nombre irrationnel comme π, dont la valeur approchée est 2,718

Une propriété importante : $\boxed{\begin{array}{l} e^0 = 1 \\ e^1 = e \end{array}}$

c) Formules

- Les formules de calcul sur les puissances fonctionnent de la même manière avec la fonction exponentielle :

- $e^x e^y = e^{x+y}$
- $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

d) Équations et inéquations

- Pour résoudre des équations ou des inéquations avec des exponentielles, il suffit de se concentrer sur les exposants :

- Si $e^a = e^b$, alors $a = b$
- Si $e^a < e^b$, alors $a < b$

Exercice - type : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$$

- On réécrit l'équation pour avoir la forme $e^a = e^b$: $e^{x^2-3} = e^{-2x}$

- En appliquant la propriété, on se concentre sur les exposants :

$x^2 - 3 = -2x$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

- On résout cette équation du second degré. Le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation possède 2 solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Les solutions sont donc : -3 et 1

2 ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

a) Dérivabilité

- La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même !

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

(C'est pour ça qu'on dit qu'elle est "sa propre dérivée".)

Exercice-type : Dérive la fonction
$g(x) = (x-1)\,e^{x}$.

- On utilise la formule de la dérivée d'un produit, $(uv) = uv + uv$

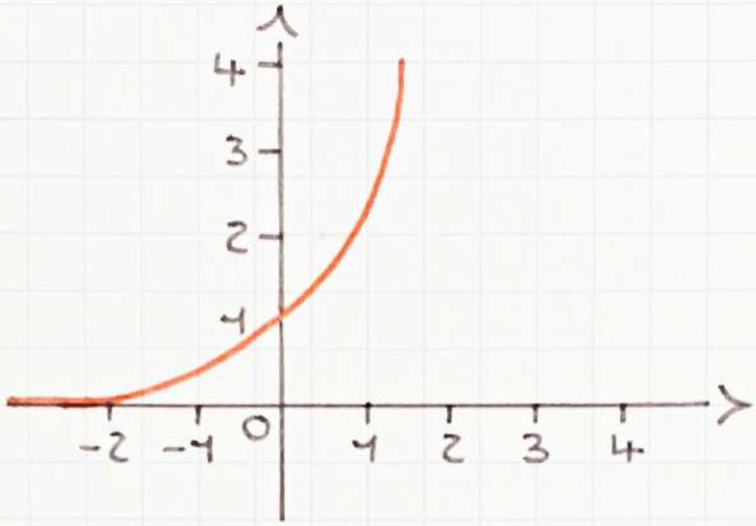
- Ici, $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^{x}$
Leurs dérivées sont : $u(x) = 1$
et $v(x) = e^{x}$

- On applique la formule :
$$g(x) = (1)(e^{x}) + (x-1)(e^{x})$$
$$= e^{x} + xe^{x} - e^{x}$$
$$= xe^{x}$$

b) Variations et courbe

- Puisque la dérivée de e^{x} est e^{x}, qui est toujours positive, la fonction exponentielle est <u>strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>.

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^{x})'$		$+$	
e^{x}	0	$\nearrow$	$+\infty$



c) Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

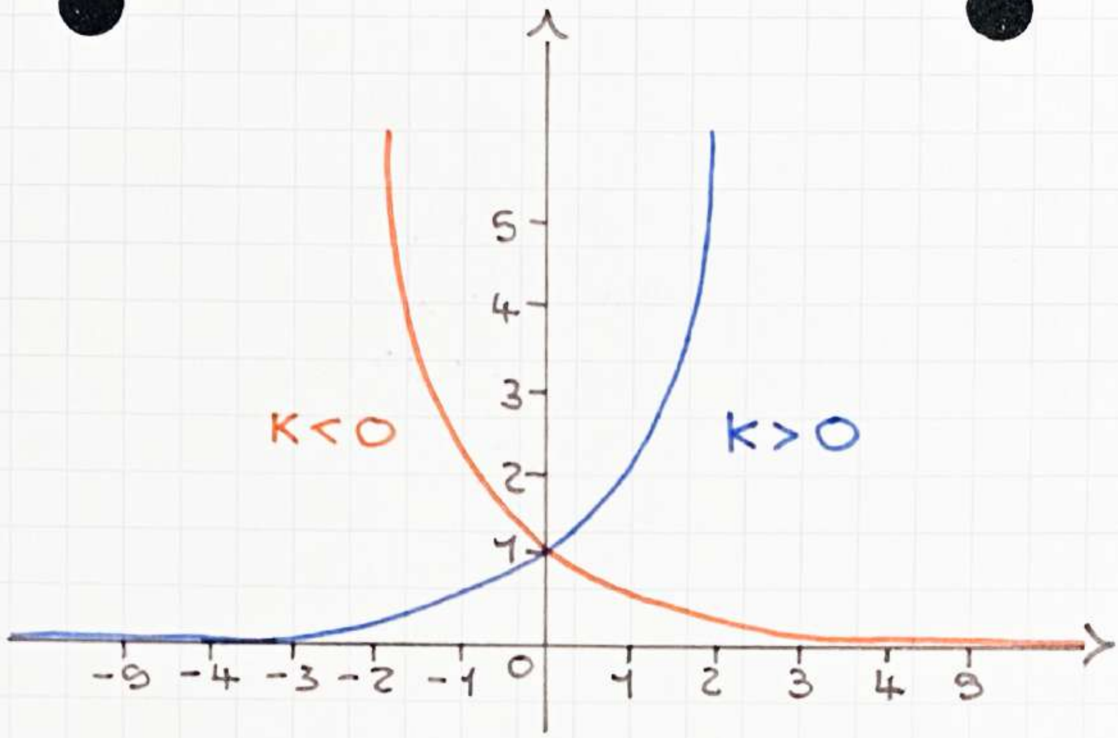
- Pour une fonction de la forme $f(t) = e^{kt}$, sa dérivée est $\boxed{f(t) = ke^{kt}}$.
- C'est la règle de la dérivée d'une fonction composée.

Exercice - type : Dérive la fonction $f(t) = 5e^{-3t}$.

↳ On applique la formule de la dérivée d'une fonction composée :
$f(t) = 5 \times (-3)e^{-3t} = -15e^{-3t}$

d) Variations de la fonction $t \mapsto e^{kt}$

- Si $k > 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.



Exercice type : Par suite d'une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0;10]$ et telle que $f'(t) = 0{,}14\, f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ convient

2) On suppose que $f(0) = 50000$
Déterminer A.

3) Déterminer les variations de f sur $[0;10]$.

4) a. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis après 5h30.

b. À l'aide de la calculatrice, détermi-
ner au bout de combien de temps
le nombre de bactéries a doublé.
Arrondir a l'heure près.

↳ 1) $f'(t) = A \times 0{,}14 \times Ae^{0{,}14t} = 0{,}14 f(t)$
La fonction f définie sur $[0 ; 10]$
par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ vérifie bien
l'égalité $f'(t) = 0{,}14\, f(t)$ donc
elle convient

2) $f(0) = Ae^{0{,}14 \times 0} = Ae^{0} = A \times 1 = A$
Donc si $f(0) = 50000$, on a :
$A = 50000$
Une expression de la fonction f
est donc : $f(t) = 50000e^{0{,}14t}$

3) Comme $k = 0{,}14 > 0$, on en déduit
que la fonction $t \mapsto e^{0{,}14t}$
est strictement croissante sur
$[0 ; 10]$. Il en est de même
pour la fonction f.

4) a. $f(3) = 50000e^{0{,}14 \times 3} = 50000$
$e^{0{,}42} \approx 76000$
$f(5{,}5) = 50000^{0{,}14 \times 5{,}5}$
$= 50000e^{0{,}77} \approx 108000$
Après 3h, l'organisme contient
environ 76000 bactéries et
environ 108000 bactéries
après 5h30

b. Le nombre de bactérie à doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

3. FONCTION EXPONENTIELLE ET SUITE GÉOMÉTRIQUE

- Pour tout nombre réel a, tu peux écrire e^{an} comme $(e^{a})^{n}$.

  ↳ Cela signifie qu'une suite de la forme $u_n = e^{an}$ est une suite géométrique de raison e^{a}.

Exercice - type : La suite $u_n = 2e^{-3n}$ est-elle géométrique ?

- Oui, car on peux la réécrire $u_n = 2(e^{-3})$. C'est une suite géométrique de premier terme

  ↳ $u_0 = 2e^{0} = 2$ et de raison $q = e^{-3}$